

Exercice n°1 • Parabole de sûreté

cours

On s'intéresse au mouvement (dans le référentiel terrestre) d'un projectile dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ terrestre, en l'absence de frottement. Il est toujours lancé avec une vitesse de même norme v_0 mais de direction variable.

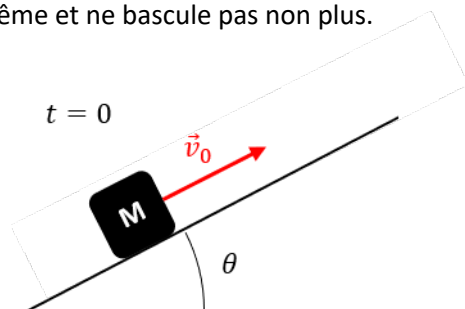
Les expressions demandées sont à exprimer en fonction du paramètre : $\delta = v_0^2/g$.

- 1) Quelle est la dimension de δ .
- 2) Déterminer l'équation de la trajectoire si le point est lancé de l'origine du repère cartésien avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.
- 3) Déterminer la hauteur maximale du projectile au cours du lancé et sa portée. Quelle valeur de α maximise cette hauteur ? Que vaut la hauteur dans ce cas ?
- 4) Même question avec la portée du tir.
- 5) À quelle condition (établir une inégalité) un point de coordonnées (X, Z) peut-il être atteint par le projectile de vitesse de norme v_0 donnée mais d'angle α quelconque ? Montrer alors que le lieu des points (X, Z) atteignable est situé sous une parabole dont on donnera l'équation. Justifier le terme de parabole de sûreté.

Exercice n°2 • Mouvement sur un plan incliné

☆☆☆

On lance avec une vitesse $\vec{v}_0$ une caisse de masse m , assimilée à un point matériel, selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, de telle sorte qu'elle y décrive un simple mouvement de translation : elle ne tourne pas sur elle-même et ne bascule pas non plus.



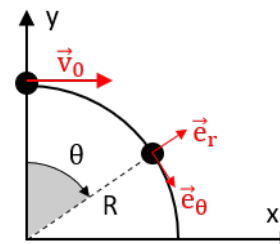
On considère que le système est soumis à un frottement fluide, correspondant à la force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, avec α une constante positive.

- 1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_x . Introduire la constante de temps τ du problème et la vitesse en régime permanent v_∞ .
- 2) Résoudre cette équation différentielle.
- 3) Déterminer le temps T que parcourt la caisse avant de faire demi-tour.
- 4) Déterminer $x(t)$ en posant $x(t=0) = 0$.

Exercice n°3 • Réaction normale du support

☆☆☆

On étudie le mouvement d'un enfant esquimau, assimilé à un point matériel M de masse m qui glisse sans frottement sur un Igloo de rayon R . Il part avec une vitesse v_0 depuis le sommet de l'igloo.



- 1) L'enfant est soumis à deux forces, lesquelles ?
 - 2) Appliquer le PFD sur l'enfant dans la base polaire. Identifier l'équation du mouvement. Quelle information l'autre équation contient-elle ?
- Il n'est pas possible de résoudre l'équation du mouvement. En revanche, on peut tout de même s'en servir pour résoudre l'autre équation, portant sur la réaction normale de l'igloo.
- 3) Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, puis intégrer entre l'instant initial et un instant t quelconque. Montrer que :

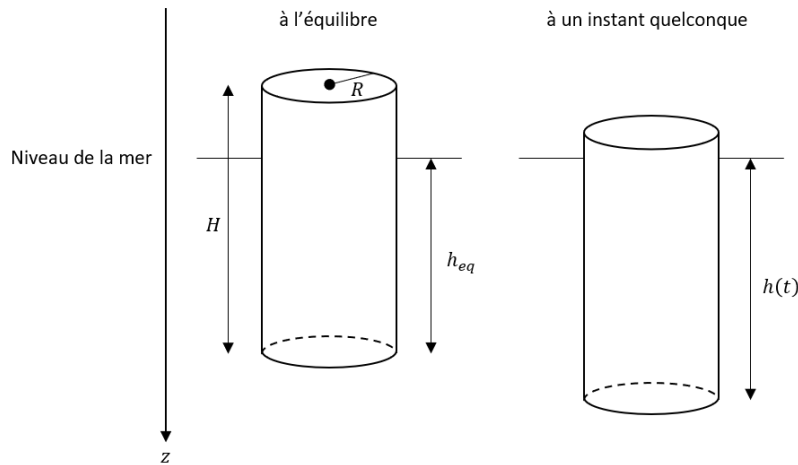
$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g(1 - \cos(\theta))$$

- 4) En déduire l'expression de la norme de la force de réaction normale de l'igloo.
- 5) Déterminer l'angle θ_c où l'enfant décolle de l'igloo. Conclure.

Exercice n°4 • Mouvement d'un flotteur

☆☆☆

Un cylindre homogène, de centre de masse G , de masse m , de hauteur H et de rayon R flotte à la surface de l'eau. On note ρ la masse volumique du fluide.



On décrit le mouvement du centre de masse G selon l'axe vertical (Oz) dirigé vers le bas. L'origine O correspond à la surface de l'eau. On note h_{eq} la hauteur immergée lorsque le flotteur est à l'équilibre. On note $h(t)$ la hauteur immergée à un instant t quelconque.

On rappelle que la poussée d'Archimède correspond à l'opposé du poids du liquide déplacé par le cylindre. En notant V_{im} le volume du cylindre immergé, on a donc :

$$\vec{\Pi}_a = -\rho V_{im} g \vec{u}_z$$

1) Exprimer la poussée d'Archimède en fonction de ρ , g , $h(t)$ et R .

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre en l'enfonçant dans l'eau (à la verticale). On note $h_0 = h(t=0)$ la hauteur du cylindre immergée à $t=0$. On le lâche sans vitesse initiale et on néglige toute source de frottement.

2) À l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué sur le cylindre, montrer que la hauteur immergée du cylindre vérifie l'équation :

$$\ddot{h}(t) + \omega_0^2 h(t) = \omega_0^2 h_{eq}$$

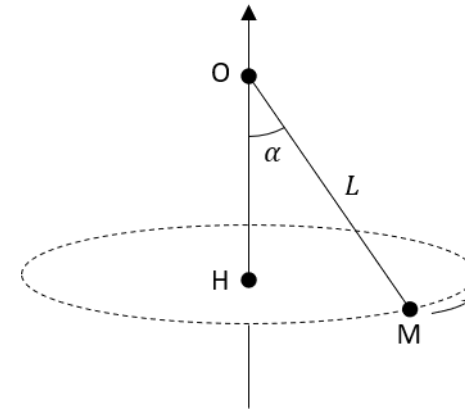
Exprimer ω_0 en fonction des constantes du problème.

3) Donner la solution cette équation différentielle et la tracer.

Exercice n°5 • Étude d'un pendule



On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible, de longueur L , de masse négligeable, fixé en O et auquel on a accroché une petite bille de masse m assimilable à un point matériel M . O est fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ galiléen.



Un enfant fait tourner le pendule de manière à ce que le masse effectue un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω le plan (xOy). Le fil OM garde une inclinaison constante $\alpha > 0$ par rapport à la verticale au cours du mouvement.

1) On se place en coordonnées cylindriques (origine au point O , axe vertical vers le haut). Faire un schéma du problème pour situer les différentes notations.

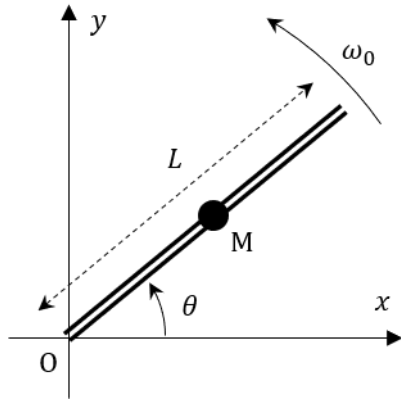
2) Appliquer le PFD. En déduire une relation entre ω , L , g et α .

3) Montrer que la vitesse angulaire est forcément supérieure à une certaine valeur ω_c . Que fait le pendule sinon ?

Exercice n°6 • Rail en rotation



Un rail de longueur L , tourne autour d'un point O fixe, dans un plan horizontal (le schéma est une vue de dessus), à la vitesse angulaire ω_0 constante. On place sur ce rail une petite bille M , de masse m , qui peut se déplacer sans frottements uniquement dans la direction du rail.



La bille est placée à l'instant initial, sans vitesse, à la distance d (avec : $0 < d < L$) du point O .

1) Faire un bilan des forces. Établir l'équation du mouvement puis la résoudre afin de déterminer $\overrightarrow{OM}(t)$.

On attache maintenant la bille à un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 , dont l'autre extrémité est fixée en O . On admet que le ressort exerce une force :

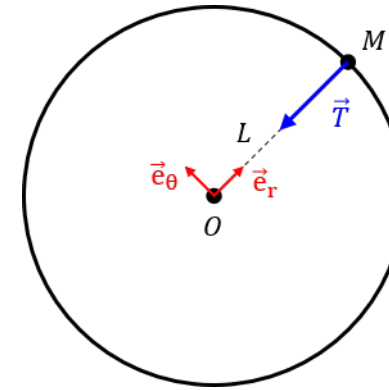
$$\vec{F} = -k(\ell_0 - r)\vec{u}_r$$

2) Montrer que la bille peut effectuer des oscillations harmoniques dans le tube, autour d'une position d'équilibre r_{eq} , sous réserve que la raideur du ressort obéisse à une condition à préciser. Déterminer, dans ce cas, r_{eq} et la pulsation ω_1 des oscillations.

Exercice n°7 • Patineur en rotation



Un patineur à roulettes de masse m décrit des révolutions autour d'un poteau fixe vertical en se tenant à une corde. Il s'équilibre de telle sorte que la réaction du sol $\vec{R}$ sur lequel il se déplace n'ait pas de composante radiale ($\vec{R} \cdot \vec{u}_r = 0$). L'homme peut être considéré comme un solide en translation. On utilise les coordonnées cylindriques définies sur la figure ci-dessous.



On considère dans un premier temps que le mouvement s'effectue sans frottement et qu'il est circulaire uniforme de rayon L à la vitesse angulaire ω_0 dans le sens de θ croissant.

1) Déterminer la norme T_0 de la tension que le patineur doit exercer sur le câble pour se maintenir en mouvement circulaire uniforme et calculer sa valeur pour $m = 80 \text{ kg}$, $L = 2,0 \text{ m}$ et s'il parcourt un tour en $\tau = 3,0 \text{ s}$.

À un instant qu'on définit comme nouvelle origine des temps, le patineur commence à freiner. On modélise les frottements avec le sol par une force orthoradiale $\vec{F}_f = -F_0 \vec{e}_\theta$ de norme $F_0 > 0$ constante. Le patineur ajuste la norme T de manière à rester en mouvement circulaire.

2) Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ puis celle de l'angle θ .

3) En déduire l'expression de T en fonction du temps, en fonction de θ . Au bout de combien de tours peut-il lâcher la corde si $F_0 = mg/3$?

Éléments de correction

❶ 1) Longueur. 2) $z(x) = -\frac{1 + \tan^2(\alpha)}{2\delta} x^2 + \tan(\alpha) x$. 3) $z_{max}(\alpha) = \frac{\delta \sin^2(\alpha)}{2}$ et $z_{max}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\delta}{2}$. 4) $x_{max}(\alpha) = \delta \sin(2\alpha)$ et $x_{max}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \delta$. 5) $Z \leq \frac{\delta}{2} - \frac{X^2}{2\delta}$. ❷

1) $\dot{v}_x + \frac{v_x}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$ avec : $\tau = \frac{m}{\alpha}$ et $v_\infty = -g\tau \sin(\theta)$. 2) $v_x(t) = (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau} + v_\infty$. 3) $T = \tau \ln\left(\frac{v_0 - v_\infty}{-v_\infty}\right)$. 4) $x(t) = \tau(v_0 - v_\infty)(1 - e^{-t/\tau}) + v_\infty t$. ❸ 1)

Poids, réaction normale du support. 2) $-mR\dot{\theta}^2 = N - mg \cos(\theta)$ et $mR\ddot{\theta} = mg \sin(\theta)$. 4) $N = m\left(-\frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos(\theta) - 2)\right)$. 5) $\cos(\theta_c) = \frac{1}{3}\left(\frac{v_0^2}{gR} + 2\right)$. ❹

1) $\vec{\Pi}_a = -\rho\pi R^2 h(t) g \vec{u}_z$. 2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho\pi R^2 g}{m}}$ et $h_{eq} = \frac{m}{\rho\pi R^2}$. 3) $h(t) = h_0 \cos(\omega_0 t)$ ⑤ 2) $\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}$. 3) $\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{g}{L}}$. ⑥ 1) $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ et $\vec{N} = N_z \vec{u}_z + N_\theta \vec{u}_\theta$. ED : $\ddot{r} - r\omega_0^2 = 0$. Solution : $r(t) = d \operatorname{ch}(\omega_0 t)$. 2) Si $\frac{k}{m} > \omega_0^2$, OH avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega_0^2}$ et $r_{eq} = \frac{\ell_0}{1 - m\omega_0^2/k}$. ⑦ 1) $T_0 = mL \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 = 700 \text{ N}$. 2) $\dot{\theta} = \omega_0 - \frac{F_0}{mL} t$ et $\theta = \omega_0 t - \frac{F_0}{2mL} t^2$. 3) $T = mL \left(\omega_0 - \frac{F_0}{mL} t \right)^2 = mL \left(\omega_0^2 - \frac{2F_0}{mL} \theta \right)$. Lâcher : $\theta = \frac{mL\omega_0^2}{2F_0} = 1,3 \text{ rad} = 0,2 \text{ tour}$